Übungen zu Mathematik I
Blatt 2

Aufgabe 1: Wir betrachten die beiden komplexen Zahlen $z = 2 - i$ und $w = 1 + 3i$. Bringen Sie die folgenden Ausdrücke in die Standardform $a + bi$:

$$z^* \quad \frac{1}{z}, \quad z + w, \quad z \cdot w \quad \text{und} \quad \frac{w}{z}.$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{1}{i}, \quad z_2 = \frac{2+i}{1-i} \quad \text{und} \quad z_3 = (2+3i)^3.$$

Aufgabe 3: Wir definieren die folgenden beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 = -2 + 2i \quad \text{und} \quad z_2 = 3 + 3i.$$

a) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$.

b) Überführen Sie die beiden Zahlen in Exponentialform und berechne Sie anschließend $z_1 \cdot z_2$ erneut. Sie können den Winkel z.B. in einer Skizze ablesen und benötigen keinen Taschenrechner.

c) Berechnen Sie z_1^4 und überlegen Sie sich, welche Darstellungsform Sie hierzu verwenden.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an:

a) $(2 - i) + (3 + 4i) - (2i - 1)$

b) $(1 + i) \cdot (i - 1) \cdot (2 + 2i)$

c) $\dfrac{2 + 3i}{3 - 2i}$

d) $\dfrac{(2 - i) + (2i - 2)}{2 + 2i}$

e) $\dfrac{(1 + i) \cdot (2 - i)}{(2 + i) - (1 + 3i)}$

f) $(2 - 3i) \cdot (1 + i)^{-2}$

Aufgabe 5: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie möglichst einfache Darstellungsformen verwenden und ggf. die komplexen Zahlen entsprechend umwandeln.

a) $(1+i)\cdot i$

b) $(1+i)\cdot(i-1)\cdot(2+2i)$

c) $e^{\pi/2\cdot i}+\sqrt{2}e^{\pi/4\cdot i}$

d) $\left(e^{\pi/4\cdot i}\right)^2$

e) $(1+i)^4$

f) $\left(\sqrt{18}\cdot(\cos(\pi/4)+\sin(\pi/4)\cdot i\right)^2$

Aufgabe 6:

a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke zunächst per Hand. Überprüfen Sie ihre Ergebnisse dann z.B. mit Wolframalpha.

$$(1+i)+(2-3i)\,,\quad (1+i)\cdot(2-3i)\quad\text{und}\quad\frac{1+i}{2-3i}\,.$$

b) Wandeln Sie $z=e^{\pi/4\cdot i}$ in die algebraische Form um. Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Wolframalpha.

Aufgabe 7: Geben Sie alle komplexen Zahlen $z=a+bi$ an mit:

$$\frac{1+z}{1-z}\ \text{reell}\,(z\neq 1)\quad\text{und}\quad\frac{1+z}{1-z}\ \text{rein imaginär}\,(z\neq 1)\,.$$